

INTEGRALES

$$\int \frac{7x}{x^2 - 1} dx$$

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2 + 2x + 7}$$

$$\int (x-1)e^x dx$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}} dx$$

$$\int \frac{7x-14}{x^2-4} dx$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$\int 8x \cos x^2 \sin x^2$$

$$\int \frac{x}{x^2-1} dx$$

$$\int \frac{dx}{(6x+5)^3}$$

$$\int \sqrt[3]{3x+5} dx$$

$$\int 3x^2 \cos(x^3+1) dx$$

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

1. El dueño de un manantial de agua mineral llega a la siguiente conclusión: si el precio a que vende la botella es x pta, sus beneficios serán (pesetas al día) de: $-1000x^2 + 10000x - 21000$. Si los beneficios son positivos hablamos de ganancias y si son negativos de pérdidas.

- ¿A partir de qué precio tiene ganancias?
- ¿Puede ese precio crecer indefinidamente y seguir teniendo ganancias?
- ¿Cuál es el precio que le permite obtener mayores ganancias?
- Para vender más está dispuesto a tener pérdidas de hasta 12.000 pesetas al día para lo cual baja el precio: ¿qué precio debe poner?

2. Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$ en miles de euros viene dada en función de la cantidad que se invierte, x en miles de euros, por medio de la siguiente expresión: $R(x) = -0,001x^2 + 0,4x + 3,5$

- a) Deduce y razona qué cantidad de dinero convendrá invertir en ese plan.
- b) ¿Qué rentabilidad se obtendrá?

3. Se ha comprobado empíricamente que las ganancias que proporciona cierto juego dependen del tiempo que se esté jugando a través de la expresión:

$$G(x) = 100x/(x^2 + 400)$$

(donde x representa el tiempo de juego expresado en minutos). Se pide:

- a) ¿Cuanto más tiempo se permanezca jugando es mayor la ganancia que se obtiene? Justificar la respuesta.
- b) Determinar el tiempo de juego que proporciona la mayor ganancia.
- c) ¿Puede ocurrir que si se sobrepasa cierto tiempo, el juego de pérdidas (ganancia negativa)? ¿Por qué?

• Sol.: b) 20 min; c) no

4. El consumo de bebidas alcohólicas está gravado con cierto impuesto. Empíricamente se ha obtenido que el impuesto pagado, $T(x)$ pts., depende de la cantidad de bebida (x en litros) según la relación siguiente:

$$T(x) = 1000x/(x + 100)$$

Se pide:

- a) Deducir razonadamente que el impuesto pagado es creciente con el consumo de bebida.
- b) Comprobar que la segunda derivada de la función $T(x)$ tiene signo negativo.
- c) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x)$. ¿Puede ocurrir que se paguen 3000 pts. de impuesto?
- d) Teniendo en cuenta los apartados anteriores, representar gráficamente $T(x)$.

• Sol.: c) 1000 pts, no

5. La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x expresado en horas) en los siguientes términos:

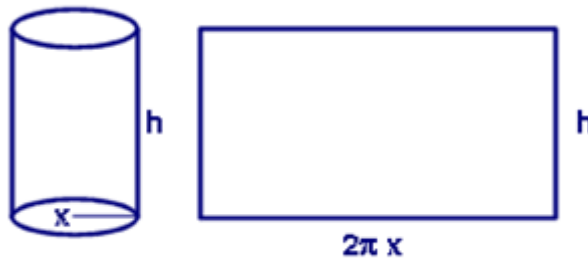
$$P(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ \frac{2x}{0,2x+3} & \text{si } 15 < x \end{cases}$$

- a) Estudiar el crecimiento de la función. Si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas a preparar un examen, justificar que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de 5 puntos.
 b) Justificar que la puntuación nunca puede ser superior a 10 puntos.

6. Una ventana de forma rectangular está rematada en la parte superior por un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es igual a P. ¿Cuál debe ser la base del rectángulo para que la ventana tenga la mayor superficie posible?. Justificar la respuesta.

• Sol.: $\frac{2}{3}(2 - \sqrt{4-P})$

7. Se quiere fabricar latas de refresco cuyo contenido sea de 33 cl, de manera que el coste de la chapa sea mínimo. Halla las dimensiones que ha de tener la lata, es decir, el radio y la altura. Calcula también el valor de la superficie de chapa mínima.



Sol: $x=3.75$ y $h = 7.5$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES. ÁREAS

1. Dada la función $f(x) = 4x^3 + 10x + 8$, se pide: a) Calcular una primitiva, $F(x)$, que cumpla la condición $F(1) = 20$. b) Aplicar la regla de Barrow para calcular la integral de la función del enunciado, $f(x)$, en el intervalo $[1,2]$.

• Sol.: a) $x^4 + 5x^2 + 8x + 6$; b) 38

2. Sea $f(x) = x^2 + bx$ donde b es una constante.

- (a) Encuentra b sabiendo que hay una primitiva F de f con $F(0) = 2$ y $F(3) = 20$. Encuentra también la expresión de F.
 (b) Dibuja la curva $f(x)$ cuando $b = -1$ y halla el área delimitada por dicha curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 2$.

• Sol.: a) $b = 2$; $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{b}{2} \cdot x^2 + C$. b) 1 u.s.

EJERCICIO

Sean las funciones $\begin{cases} y = x^3 - 4x^2 + 4x \\ y = -3x^2 + 6x \end{cases}$

Determinar:

1. Los puntos de corte con los ejes de cada función
2. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada función
3. Valor o valores de x en los que cada función tiene un extremo relativo
4. El área encerrada por ambas funciones.

EJERCICIO

Dada la función $y(x) = x^3 - x^2 - 2x$, se pide hallar:

1. Los puntos en los que la función se anula.
2. Los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.
3. Los valores de x para los cuales la función alcanza un máximo o mínimo, justificando la respuesta.
4. El área finita encerrada por la gráfica de la función y por las rectas: $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$.

EJERCICIO

Dada la siguiente función: $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

- a) Calcula los puntos de corte con los ejes y las asíntotas
- b) Puntos singulares
- c) Representación
- d) Área comprendida entre la función, el eje OX y los puntos $x = 0$ y $x = 1$ (2p)

EJERCICIO

Dadas las funciones $y = x^4 - 4x^3$ e $y = x^2 - 4x^3$ (2p)

- a) Calcula los puntos de intersección entre ambas funciones
- b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones

EJERCICIO

Dadas las funciones $y = x^3 + 1$ e $y = x + 1$ er2/9-220 (2p)

- a) Calcula los puntos de intersección entre ambas funciones
- b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones

EJERCICIO

Dominio, Intervalos de crecimiento, y puntos singulares de $y = \frac{1}{(1+x)^2}$

- a) Dominio y asíntotas
- b) Puntos de corte con los ejes y puntos singulares
- c) Intervalos de crecimiento estudiando la primera derivada
- d) Representa la función
- e) Calcula el área comprendida por la función, el eje X y las rectas $x = 2$ y $x = 3$

EJERCICIO

En una cierta región, un río tiene la forma de la curva:

$$y = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$$

y es cortado por un camino dirigido según el eje OX.

- a) Dibuja la posición del río y el camino, calculando para la curva: dominio de definición, asíntotas no oblicuas, corte con los ejes coordenados, intervalos de crecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
- b) Tomando como unidad el kilómetro y sabiendo que el precio del terreno es de 300.000 ptas. por hectárea, calcular el valor de la porción del terreno comprendido entre el río y el camino.

• Sol.: b) 10^7 ptas

PROBABILIDAD

EJERCICIO

Tres bolsas idénticas contienen bolas de cristal: la primera 6 lisas y 4 rugosas; la segunda 5 lisas y 2 rugosas; y la tercera, 4 lisas y 7 rugosas.

Determinar:

1. La probabilidad de que al extraer una bola al azar sea rugosa.
2. Se ha hecho una extracción de una bola al azar y ha resultado ser lisa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido de la primera bolsa?

EJERCICIO

Una caja A contiene dos bolas blancas y dos rojas, y otra caja B contiene tres blancas y dos rojas. Se pasa una bola de A a B y después se extrae una bola de B, que resulta blanca. Determina la probabilidad de que la bola trasladada haya sido blanca.

EJERCICIO

Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno de ellos.

- a) Un alumno sabe 6 temas. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen?
- b) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los temas elegidos y el otro no?

EJERCICIO

En una casa hay tres llaveros A, B y C, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que solo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero.

- a) ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?
 - b) ¿cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?
- (2p)

EJERCICIO

En cierta floristería recibieron cantidades iguales de rosas y gladiolos, cuyos colores son blanco y amarillo. El 60% de los gladiolos son de color amarillo, mientras que el 70% de las rosas son de color blanco.

- a) Si elegimos una rosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea de color amarillo?
 - b) Si escogemos dos gladiolos, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?
 - c) ¿Qué proporción de flores son de color blanco?
- Sol.: a) $3/10$; b) $25/49$; c) 55%.

EJERCICIO

En una máquina se han fabricado 100 piezas, de las cuales 15 presentan algún defecto.

- a) Calcular la proporción de piezas no defectuosas.
 - b) Calcular la probabilidad de que si examinamos dos piezas, ambas resulten defectuosas.
 - c) Si probamos dos piezas y la primera es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda no lo sea?
- Sol.: a) 85%; b) $7/330$; c) $85/99$

EJERCICIO

En una caja están guardados 20 relojes, de los cuales 15 funcionan correctamente.

- a) Si se extrae un reloj al azar, ¿cuál es la probabilidad de que funcione bien?
 - b) Si se extraen dos relojes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos funcionen bien?
 - c) Si se extraen dos relojes al azar sucesivamente y el primero no funciona correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo sí funcione bien?
- Sol.: a) $3/4$; b) $21/38$; c) $15/19$.

EJERCICIO

Se ha hecho un estudio de un nuevo tratamiento sobre 120 personas aquejadas de cierta enfermedad. 30 de ellas ya habían padecido esta enfermedad con anterioridad. Entre las que la habían padecido con anterioridad, el 80% ha reaccionado positivamente al nuevo tratamiento. Entre las que no la habían padecido, ha sido el 90% el que reaccionó positivamente.

- (a) Si elegimos 2 pacientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los 2 hayan padecido la enfermedad?
- (b) Si elegimos un paciente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no reaccione positivamente al nuevo tratamiento?
- (c) Si un paciente ha reaccionado positivamente, ¿cuál es la probabilidad de que no haya padecido la enfermedad con anterioridad?

• Sol.: a) $29/476$; b) $1/8$; c) $27/35$