LÍMITES

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{5x^3 + 3x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{-5x^3 + 3x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 3x}{x^3 + 1}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1}$

2. Calcula los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2(x - 1)x}{x^3 - (x + 3)^3}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2 x}{x^3 - 10x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 2x}}$ d) $\text{lím} \dfrac{\sqrt[4]{8x^3 - 5x}}{3x}$

3. Sin operar, di el límite, cuando x → +∞, de las siguientes expresiones:

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x + 1})$ b) $(x^2 - 2^x)$ c) $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}$

d) $3^x - 2^x$ e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ f) $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

4. Sin operar, di el límite, cuando x → +∞, de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$ b) $\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}$ c) $\dfrac{3x + 5}{2} - \dfrac{x^2 - 2}{x}$

d) $(x + 5)^{x^2 - 5x + 1}$ e) $\left(\dfrac{3x + 5}{2x + 1}\right)^x$ f) $\left(\dfrac{x - 2}{2x - 3}\right)^{x^2 + x}$

5. Calcula el límite, cuando x → -∞, de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1}$ b) $\dfrac{\sqrt{x^3 - 5x + 3}}{x^2 - 2x}$

6. Calcula el límite, cuando x → -∞, de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}{3x - 2}$ b) $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$ c) 3^x

- **Ejercicio 6**

a) Calcula el límite de la función $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ en los puntos en los que no está definida.

b) Halla su límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

c) Representa la función con la información que obtengas.
d) ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de esta función?

- **Ejercicio 7**

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x}$.

a) Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) ¿Cuál es la función que coincide con $f(x)$ **excepto en** $x = 0$ **y en** $x = 1$**?**

c) ¿En qué puntos no es continua $f(x)$**?**

- **Ejercicio 8**

Calcula el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2x^2 - 8}$ **cuando** $x \to 0$, $x \to 2$ **y** $x \to -2$.

Calcula también el Dominio de la función

DERIVACIÓN. REGLAS

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones

a) $y = \sqrt{x + senx}$ b) $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ c) $y = x(x^2 + \cos x)$

2. Deriva las siguientes funciones, simplificando todo lo posible.

$y = \dfrac{4x^4 - 1}{x^3}$ $y = \ln(x^5 + 1)$

$y = \dfrac{e^x}{x+3}$ $y = x(x^2 + \cos x)$

3. Derivar las siguientes funciones, simplificando todo lo posible

$y = \ln\sqrt{1-x}$ $y = \dfrac{x+1}{(2-x)^2}$ $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$ $y = e^{4x}(x - 1)$

DERIVADAS, UTILIZANDO LA DEFINICIÓN DE DERIVADA. TASAS

1. Deriva las siguientes funciones, simplificando todo lo posible.

a) $y = \dfrac{3x}{x-2}$ utilizando la definición de derivada

b) Calcula la segunda derivada de $y = \dfrac{3x}{x-2}$, utilizando la definición de derivada, partiendo de la primera derivada obtenida en el apartado a)

c) Calcula la primera y segunda derivada de la función dada, $y = \frac{3x}{x-2}$, mediante las reglas de derivación

d) Calcula la ecuación de la recta tangente a la función dada, $y = \frac{3x}{x-2}$ en el punto x = 1

2. Halla la T.V.M de lal función f(x) = $-x^2 + 5x - 3$

   a) En el intervalo [2, 4]

   b) En el intervalo [2, 2+h]

   c) Con el resultado obtenido en el apartado anterior, calcula f'(2)

3. Calcula, aplicando la definición de derivada, f'(2), f'(-1) y f(x), siendo $\mathbf{f(x) = \frac{x-1}{x}}$

4. Responde las siguientes cuestiones

   a) Calcular la tasa de variación media de la función $\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}}$ en [0 , 3]

   b) Calcula la derivada de la función $\mathbf{y = \frac{1}{\sqrt{x}}}$ en x = 1, calculando la derivada de la función según la técnica de derivación que consideres oportuna.

   c) Calcular la derivada de la función del apartado anterior ($\mathbf{y = \frac{1}{\sqrt{x}}}$) en el mismo punto (x = 1), pero utilizando la definición de derivada.

   d) Calcula la tasa de variación media de la función $\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}}$, en el intervalo [0, 0+h], calcula una vez obtenido este resultado el valor de la derivada de esta función en el punto x = 0.

<u>FUNCIONES. TANGENTES A UNA CURVA</u>

1. Una partícula se mueve sobre una curva de ecuación $y = \frac{2x+1}{x-2}$. En el punto P de abscisa x = 3, la partícula abandona la curva y se deplaza a lo largo de la recta tangente a la curva en dicho punto. Calcula la ecuación de la recta tangente en P.Si la partícula se para cuando alcanza la altura y = 2, ¿cuáles son las coordenadas del punto en el que se detiene?. (1p)

2. Determina los coeficientes de la función polinómica f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que f(1) = f(2) = 0, su gráfica pasa por el punto de coordenadas (-1, 24) y su recta tangente en el punto x =1 es horizontal. (Nota: una recta horizontal tiene pendiente 0).

3. Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $\mathbf{f(x) = -x^2 + 1}$ en el punto x = 2. Representa la función y la recta tangente obtenida

<u>FUNCIONES. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD</u>

1. Dada lal función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{Si } x \leq 0 \\ e^{-x} + 1 & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de ‘a’ y ‘b’ para que la función f sea continua y derivable en x = 0.
b) Con los valores anteriores calcula el valor de la derivada en x =-3 aplicando la definición de derivada.
c) Calcula la ecuación de la recta pendiente a la curva en el punto x = - 3
d) Representa los dos trozos que forman la función en una misma gráfica.

2. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{Si } x \leq 0 \\ -x^2 - ax + b & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

a) halla los valores de ‘a’ y ‘b’ para que la función sea continua y derivable en todo R.
b) Con los valores obtenidos para ‘a’ y ‘b’, halla los puntos de la curva y = f(x) en los que la tangente es paralela a la recta y = x – 8
c) Calcula los vértices de los dos trozos que definen la función.
d) Escribe la definición de continuidad en un punto.

3. Halla ‘a’ y ‘b’ para que la siguiente función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Una vez obtenidos ‘a’ y ‘b’ estudia la derivabilidad de la función.

Ejercicio 4

Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ k & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 5

Estudia la continuidad de las siguientes funciones, represéntalas gráficamente y di cuáles son sus límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

Ejercicio 6

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

calcula el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$. ¿Es continua en $x = 1$?

Ejercicio 7

Representa, estudia la continuidad y halla los límites para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 8

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

<u>OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES. EJERCICIOS DE ENUNCIADO</u>

1. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro de tramo horizontal cuesta 2,5 € y el de tramo vertical 3 €.
   a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.
   b) ¿Cuál será ese coste mínimo?

2. Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$ en miles de euros viene dada en función de la cantidad que se invierte, x en miles de euros, por medio de la siguiente expresión: $R(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}4x + 3{,}5$
   a) Deduce y razona qué cantidad de dinero convendrá invertir en ese plan.
   b) ¿Qué rentabilidad se obtendrá?
   c) ¿Deduce y razona qué cantidad invertida, x, puede hacer que la rentabilidad sea nula?

Ejercicio 3

Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x + 30}, & 0 \le x \le 30 \\ \dfrac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2, & x > 30 \end{cases}$$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.

b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?

Ejercicio 4

Se ha comprobado que las pérdidas o ganancias de una empresa se ajustan a la función $y = \dfrac{2x-4}{x+2}$, siendo x los años de vida de la empresa ($x \ge 0$) e y en cientos de miles de €.

a) Representa la función.

b) ¿En qué año deja de tener pérdidas?

c) ¿Están limitados sus beneficios? Si lo están, ¿cuál es su límite?

5. Un vendedor de enciclopedias recibe como sueldo mensual una cantidad fija de 50.000 pts. más una comisión que depende del número de enciclopedias que venda según la expresión $1000x - 0{,}25x^3$ (donde x representa el número de enciclopedias). El vendedor debe correr con sus propios gastos, y

tiene unos fijos de 10.000 pts. mensuales más otros variables, que estima en 700 pts. por cada enciclopedia vendida. Se pide:

a) Obtener la función que recoge el sueldo mensual del vendedor.

b) Determinar la función de gastos.

c) Obtener la función de beneficios (sueldo menos gastos) del vendedor.

d) ¿Cuántas enciclopedias debe vender para obtener el máximo beneficio mensual? Calcular dicho beneficio.

• Sol.: a) $-0.25\ x^3 + 1000\ x + 50\ 000$; b) $700\ x + 10000$; c) $-0.25\ x^3 + 300\ x + 40000$; d) 20 enciclopedias, 44 000 ptas

6. El consumo de bebidas alcohólicas está gravado con cierto impuesto. Empíricamente se ha obtenido que el impuesto pagado, T(x) pts., depende de la cantidad de bebida (x en litros) según la relación siguiente:

$$T(x) = 1000x/(x + 100)$$

Se pide:

a) Deducir razonadamente que el impuesto pagado es creciente con el consumo de bebida.

b) Comprobar que la segunda derivada de la función T(x) tiene signo negativo.

c) Calcular $\lim_{x \to \infty} T(x)$. ¿Puede ocurrir que se paguen 3000 pts. de impuesto?

d) Teniendo en cuenta los apartados anteriores, representar gráficamente T(x).

• Sol.: c) 1000 ptas, no

7. La paga mensual que un padre da a su hijo (P(x) en ptas.) depende de su sueldo (x en miles de ptas.), de acuerdo con la siguiente expresión:

$$P(x) = \frac{10000x}{2x + 50}$$

a) Justificar que la paga del hijo aumenta a medida que lo hace el sueldo del padre.

b) Calcular $\lim_{x \to \infty} P(x)$. ¿En algún caso la paga superará las 5000 ptas.?

c) Calcular la segunda derivada de P(x). Teniendo en cuenta toda la información anterior, representar gráficamente dicha función.

• Sol.: b) $5 \cdot 10^3$ ptas, no

8. Los costes de fabricación (C(x) en ptas.) de cierta variedad de galletas dependen de la cantidad elaborada (x en kg.) de acuerdo con la siguiente expresión:

$$C(x) = 10 + 170x$$

El fabricante estima que el precio de venta de cada kg. de galletas viene dado por:

$$p(x) = 200 - \frac{25x^2}{10000} \qquad \text{en pts}$$

a) ¿El precio de venta disminuye con la cantidad?

b) Suponiendo que vende todo lo que fabrica, obtener la función que recoge sus ganancias.

c) ¿Qué cantidad de galletas le interesa producir para maximizar las ganancias?

d) En la situación óptima, ¿cuál es el precio de venta? ¿qué ganancia obtiene?

• Sol.: b) $-(1/400)\ x^3 + 30\ x - 10$; c) 63.2 kg; d) 190 ptas, 1254.9 ptas