

SISTEMAS DE ECUACIONES. PROBLEMAS

1. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$4x + y - z = 7$$

$$2x + y + z = 3$$

$$3x + y + z = 4$$

2. Resuelve el siguiente sistema homogéneo

$$x + y - z = 0$$

$$12x - 3y - 2z = 0$$

$$x - 2y + z = 0$$

3. Estudia el sistema. Resuelve la ecuación. Interpretación geométrica

$$x - y = 2$$

$$2x - y = 0$$

4. Se han comprado tres fincas (A, B y C). La finca B tiene 100 m² más de extensión que la finca A, y la extensión de C es igual a la de A y B juntas. El precio pagado por m fue de 10000 pts en A, 15000 pts en B y 12000 pts en C, y la compra ha supuesto en total un desembolso de 7600000 pts. Calcular la extensión de cada una de las fincas.

5. Un joyero tiene tres clases de monedas A, B y C. Las monedas de tipo A tienen 2 gramos de oro, 4 gramos de plata y 14 gramos de cobre; las de tipo B tienen 6 gramos de oro, 4 gramos de plata y 10 gramos de cobre, y las de tipo C tienen 8 gramos de oro, 6 gramos de plata y 6 gramos de cobre. ¿Cuántas monedas de cada tipo debe fundir para obtener 44 gramos de oro, 44 gramos de plata y 112 gramos de cobre?

6. Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + 2y + z = 9$$

$$x - y - z = -10$$

$$2x - y + z = 5$$

- a) Resuelve el sistema anterior utilizando la regla de Cramer
b) Resuelve el sistema por el método de Gauss.

b) Un examen consta de tres pruebas. Cada una de ellas se califica con una puntuación de 0 a 10. No obstante, debido a su diferente nivel de dificultad, cada prueba tiene una ponderación distinta a la hora de determinar la calificación global del examen; las ponderaciones son: 0,5 para la prueba 1, 0,3 y 0,2 –respectivamente- para las pruebas 2 y 3. La calificación global se calcula multiplicando la puntuación obtenida en cada prueba por la correspondiente ponderación y sumando estos resultados. Tres alumnos han sacado las puntuaciones siguientes:

Alumno \ Prueba	1	2	3
Juan	4	5	8
María	4	3	6
Pablo	8	7	9

- a) Obtener, utilizando el cálculo matricial, la calificación global de estos alumnos.
b) Calcular el determinante de la matriz cuadrada utilizada en el apartado a). (2p)

8. La distancia de tres playas (A, B y C) del lugar de veraneo de una familia es tal que el doble de la distancia a A es el triple de la distancia a B. La suma de las distancias a A, B y C es de 90.000 m, y el

doble de la distancia a B más el triple de la distancia a C menos la distancia a A es igual a 130.000 m.
¿Cuál es la distancia a cada playa?

DISCUSIÓN DE SISTEMAS CON UN PARÁMETRO

1. Discutir en función del parámetro 'k' y resolver, cuando se pueda el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x + y + kz &= 1 \\kx + (k - 1)y + z &= k \\x + y + z &= k+1\end{aligned}$$

2. Estudiar, según los valores de a, el sistema:

$$\left. \begin{aligned}x - 2y + az &= a \\x + 4y + a^2z &= 6 + a \\x - 8y + a^2z &= -6\end{aligned} \right\}$$

y resolverlo cuando sea posible.

• Sol.: Si $a = 0$, sistema compatible determinado: $x = 2, y = 1$; si $a = 1$ sistema incompatible; si $a \neq 1$ y $a \neq 0$, sistema compatible

3. Se considera el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$n^2x + ny = -1$$

$$(3n^2 - 2n)x - y = 6n + 1$$

- Estudiar el sistema en función del parámetro n .
- En aquellos casos en que sea posible, resolverlo.

4. Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro 'm' y resuelve la ecuación cuando sea posible

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 0 \\x + my + z &= 0 \\2x + 3y + 4z &= 2\end{aligned}$$

5. Discute el siguiente sistema, según el parámetro 'm', (si para algún valor de 'm' es compatible calcula la o las soluciones)

$$\begin{aligned}2x + y - z &= 1 \\x - 2y + z &= 3 \\5x - 5y + 2z &= m\end{aligned}$$

6. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro a, y resolverlo en el caso de que sea compatible:

$$\left. \begin{aligned}ax + y - z &= 0 \\x + 3y + z &= 0 \\3x + 10y + 4z &= 0\end{aligned} \right\}$$

• Sol.: Si $a = 1$, sistema compatible indeterminado de soluciones: $x = 2\lambda, y = -\lambda, z = \lambda$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$); si $a \neq 1$, sistema compatible determinado: $x = y = z = 0$

7. Sea el sistema:

$$\left. \begin{aligned}ax - 3y &= 1 \\-x + (a - 2)y &= -1/3\end{aligned} \right\}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

- Discutir la compatibilidad del sistema según los valores de a y resolverlo cuando sea posible.
- Interpretar geoméricamente los distintos casos determinados en el apartado i), indicando asimismo el conjunto de soluciones correspondiente.

• Sol.: i) Si $a = 3$ sistema compatible indeterminado: $x = \lambda + 1/3, y = \lambda$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$); si $a = -1$ sistema incompatible; si $a \neq 3$ y $a \neq -1$ sistema compatible determinado: $x = 1/(a + 1), y = -1/3(a + 1)$

CALCULO MATRICIAL

1. Averigua como ha de ser una matriz X que cumpla la siguiente condición:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} X - 3Y = A \\ 2X + 3Y = B \end{cases}$$

siendo $A = \begin{pmatrix} -20 & -5 \\ -2 & -15 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y las incógnitas X e Y matrices de orden 2x2

4. las matrices A y B siguientes, demuestra la siguiente propiedad: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 5 & -7 & -9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Calcula los valores de x para que la matriz A= cumpla la ecuación $A^2 - 6A + 9I = 0$, siendo I la matriz unidad

6. Calcula la potencia n-ésima de la siguiente matriz: (Observación, calcula C^2 , C^3 , C^4 y luego C^n)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular el determinante de cada una. ¿A es una matriz regular? ¿lo es B?. ¿Por qué?. Determinar, si es posible, la matriz inversa correspondiente.

b) Sea $c = 3$, obtener la matriz cA y el determinante de cA .

c) Hallar la matriz producto AB. Demostrar que la matriz AB no tiene inversa.

8. Calcular la inversa de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{11}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{20}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

9. Halla x e y para que el rango de la matriz A sea igual a 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 1 \\ -1 & y & -1 & 3 \\ 5 & x & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Sol: $x = -2$ $y = 1$

10. Calcula B^n siendo (1p)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

11. Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$, siendo: (2p)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

12. Calcula A^n y B^n siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

12. Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) Determina el rango de M según los distintos valores de m .

b) Calcula la matriz inversa de M si $m = 3$.

c) Dar un valor de m para que la matriz M sea singular (no sea inversible).

• Sol.: a) Si $m = 1$ ó $m = -2$, $\text{rg}(M) = 2$; si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, $\text{rg}(M) = 3$; b) $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 11/20 & 1/10 & -1/4 \\ -2/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$; c) $m = 1$ ó $m = -2$

DETERMINANTES

1. Que valor o valores de 'a' anulan el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix}$$

2. Calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Que valor o valores de 'a' anulan el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$

5. Resuelve la siguiente ecuación (calcula el valor de x)

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

6. Prueba que el siguiente determinante es 0

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

7. Resuelve la siguiente ecuación (calcula el valor de x)

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

VARIOS: INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE SISTEMAS. ENUNCIADOS DE PROBLEMAS MEDIANTE MATRICES

1. Interpretar geoméricamente el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= -1 \\ -10x - 15y &= 5 \\ 8x + 12y &= -4 \end{aligned}$$

2. Un importador de globos los importa de dos colores: de color naranja (N) y de color fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que vende a los siguientes precios (en pesetas):

	2 unidades	5 unidades	10 unidades
Color N	4	8	12
Color F	3	5	8

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes,

	Color N	Color F
De 2 unidades	700000	50000
De 5 unidades	600000	40000
De 10 unidades	500000	500000

se pide:

1. Resumir la información anterior en dos matrices A y B: A será una matriz 2×3 que recoja las ventas en un año y B una matriz 3×2 que recoja los precios.
2. Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz A por B y dar su significado.
3. Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz B por A y dar su significado

(Selectividad Cantabria 2001)

3. Una dieta para criar pollos se obtiene mezclando tres tipos de pienso en las cantidades siguientes: 100 gr. del pienso A, 200 gr. del pienso B y 150 gr. del C. Cada tipo de pienso contiene grasas, proteínas y vitaminas según las proporciones que se indican en la tabla siguiente por cada 100 gr.:

	Grasas(gr.)	Proteínas(gr.)	Vitaminas(Unid.)
pienso A	1	2	1
pienso B	2	3	1
pienso C	1	1	3

- a) Utilizando el cálculo matricial, calcular el contenido total de grasas, proteínas y vitaminas que tiene la dieta.
- b) Calcular el determinante de la matriz cuadrada obtenida en el apartado anterior.
- c) Definir el concepto de matriz inversa. ¿Tiene inversa la matriz del apartado a)? ¿Por qué?
- d) En la matriz del apartado a) sustituir la última fila por otra de manera que la matriz resultante no tenga inversa.

• Sol.: a) 6.50 g de grasa, 9.50 de proteínas y 7.50 de vitaminas; b) -3